# تحلیل قابلیت اعتماد سازه‌ها براساس روش ترکیبی کوچک‌ترین مربعات دستگاه بردارهای پشتیبان و شبیه‌سازی مونت‌کارلوی پیشرفته*

(یادداشت پژوهشی)

محمدمهدی مجاهد(۱) بهروز احمدی ندوشن(۲)

**چکیده** *باتوجه به کوچک بودن احتمال خرابی سازه‌ها، تحلیل قابلیت اعتماد سازه‌ها هزینهٔ زمانی بالایی را به‌همراه خواهد داشت. در این مقاله، به‌منظور کاهش زمان محاسبات، الگوریتمی براساس ترکیب روش رگراسیونی کوچک‌ترین مربعات دستگاه بردارهای پشتیبان و دو روش شبیه‌سازی مونت کارلوی پیشرفته: نمونه‌برداری بااهمیت و ابرمکعب لاتینی، ارائه شده است. با ارائهٔ دو مثال قاب و یک مثال خرپا کارایی الگوریتم‌های پیشنهادی مورد ارزیابی قرار گرفته است. نتایج حاصل نشان می‌دهد که روش پیشنهادی می‌تواند احتمال خرابی را به‌خوبی تخمین زند و زمان محاسبات در مقایسه با دیگر روش‌های ارائه‌شده در سال‌های اخیر بسیار کمتر می‌باشد.*

**واژه‌های کلیدی** قابلیت اعتماد سازه‌ها، روش‌های پیشرفتهٔ شبیه‌سازی مونت‌کارلو، دستگاه بردارهای پشتیبان، احتمال خرابی.

# Least Squares Support Vector Machine-based Advance Monte Carlo Methods for Reliability Analysis of Structures

M. Mojahed B. Ahmadi-Nedushan

**Abstract** *The failure probability of structures are rather small and therefore calculation of structural reliability generally has a high computational cost. In order to reduce computational costs, this articles proposes a hybrid approach based on combination of the least squares support vector regression and two advanced Monte Carlo methods: importance sampling and Latin hypercube sampling. Two frames and one truss example are used to evaluate the performance of the proposed algorithm. Results demonstrate that proposed method provides an accurate estimation of failure probability and that the computational costs are lower than those of other methods.*

**Key Words** Structural Reliability, Advanced Monte Carlo Methods, Support Vector Machine, Failure Probability.

---

* تاریخ دریافت مقاله ۹۱/۱۲/۳ و تاریخ پذیرش آن ۹۲/۱۱/۹ می‌باشد.

(۱) نویسندهٔ مسئول، دانشجوی کارشناسی ارشد سازه، دانشکده عمران، پردیس فنی و مهندسی، دانشگاه یزد.

Email: mahdimojahed@gmail.com

(۲) دانشیار دانشکده عمران، پردیس فنی و مهندسی، دانشگاه یزد.

## مقدمه

قابلیت اعتماد، موضوعی بااهمیت در تحلیل و طراحی سازه‌ها می‌باشد. بحث اصلی تحلیل قابلیت اعتماد سازه‌ها، محاسبهٔ تخمین احتمال خرابی ناشی از عدم قطعیت پارامترها خواهد بود. به‌دلیل ماهیت غیرقطعی پارامترهای سازه و در دسترس نبودن تابع حالت حدی به فرم ریاضی، محاسبهٔ ایمنی مطلق غیرممکن می‌باشد [1].

باتوجه به مشکلات روش‌های تحلیلی و شبیه‌سازی، از اوایل دههٔ ۸۰ میلادی روش‌های سطح پاسخ به‌منظور کاهش حجم محاسبات و درنتیجه کاهش هزینهٔ زمانی ناشی از روش‌های المان محدود به‌کار گرفته شدند. ایدهٔ اساسی این روش‌ها، جایگزینی توابع حالت حدی با توابع سطح پاسخ ساده‌تر می‌باشد. با تخمین تابع عملکرد مناسب، می‌توان تحلیل قابلیت اعتماد سازه‌ها را به‌درستی انجام داد [2-4].

در دو دههٔ اخیر با پیشرفت تحقیقات در زمینهٔ هوش مصنوعی، روش شبکهٔ عصبی مصنوعی به‌منظور تقریب تابع عملکرد به‌سرعت جایگزین روش‌های پیشین شد. کاربرد و جوانب مختلف روش شبکهٔ عصبی در بسیاری از مقالات مطرح شده است [5-7]. شبکهٔ عصبی با تمام مزیت‌هایی که نسبت به روش‌های کلاسیک دارد، در بسیاری از مسائل سازه‌ای با تعداد متغیرهای زیاد می‌تواند هزینهٔ زمانی نسبتاً زیادی، برای محاسبات دربر داشته باشد [8].

در همین راستا برای رفع مشکلات شبکهٔ عصبی، روش رگراسیونی دستگاه بردار پشتیبان (Support Vector Machine(SVM)) به‌عنوان یک روش یادگیری هوشمند برای به‌دست آوردن مدل رگراسیونی مناسب، به‌کار گرفته شده است. واپنیک، برای اولین بار در سال ۱۹۹۸، این روش را براساس تئوری بهینه‌یابی پیشنهاد داد [9]. روش SVM برای تقریب توابع عملکرد با افزایش تعداد داده‌های آموزشی، کارایی مناسبی از خود نشان نمی‌دهد لذا کارایی آن برای سازه‌هایی که دارای متغیرهای زیادی هستند، کمتر می‌شود و هزینهٔ زمانی زیادی را برای آموزش مدل صرف می‌کند. برای رفع مشکلات ناشی از این روش، بای گانچن در سال ۲۰۰۹ به بررسی کاربردهای روش رگراسیونی کوچک‌ترین مربعات دستگاه بردارهای پشتیبان (Least Squares Support Vector Machine (LSSVM)) و ترکیب آن با روش نمونه‌برداری مونت‌کارلوی معمولی پرداخت و با ارائهٔ مثال‌های عددی نشان داد که این روش درمقایسه با روش SVM از کارایی بالاتری از لحاظ کاهش هزینهٔ زمانی برخوردار است [10].

باتوجه به‌اینکه کاربرد روش LSSVM اخیراً به‌عنوان نسخهٔ بهبودیافته‌ای از SVM در سایر رشته‌های علوم و مهندسی بسیار مورد توجه قرار گرفته است [10-13]، در تعیین قابلیت اعتماد سازه‌ها بسیار محدود است و هم‌چنین باتوجه به مشکلات روش‌های نوین دیگر برای کاهش زمان محاسبات؛ لذا در این مقاله از این روش استفاده شده است. زمان ناشی از تعداد تحلیل براساس روش شبیه‌سازی مونتکارلوی معمولی زیاد می‌باشد لذا در این مقاله بااستفاده از روش‌های نمونه‌برداری بااهمیت و ابرمکعب لاتینی و براساس اطلاعات اضافی مسئله، نواحی انتخابی نمونه‌ها در قسمت‌های مهم و موثر فضای متغیرها محدود شده و بدین ترتیب تعداد تحلیل‌های مورد نیاز و درنتیجه زمان کل محاسبات نسبت به روش شبیه‌سازی مونت‌کارلوی معمولی کاهش داده می‌شود.

درادامه باتوجه به اصولی که هر کدام از روش‌های پیشنهادی در کاهش زمان محاسبات دارند، به بررسی روش‌های نمونه‌برداری بااهمیت و ابرمکعب لاتینی درجهت تولید نمونه‌ها برای تحلیل سازه‌ها و سپس به فرمول‌بندی LSSVM پرداخته می‌شود. درنهایت با ارائهٔ نمونه‌هایی از سازه‌های اسکلتی (دو قاب و یک خرپا)، کارایی بالای الگوریتم‌های پیشنهادی درمقایسه با سایر روش‌های نوین ارائه‌شده در سالیان اخیر جهت تحلیل قابلیت اعتماد این سازه‌ها نشان داده شده

است.

## روش نمونه‌برداری بااهمیت
## (Importance Sampling Method (ISM))

روش نمونه‌گیری بااهمیت یکی از روش‌های پیشرفتۀ مونت‌کارلو می‌باشد که برای تخمین میزان احتمال خرابی و هم‌چنین تعیین محدوده‌های خرابی، مورد استفاده قرار می‌گیرد. اگر ناحیۀ خرابی به‌دست آمده از تحلیل سازه‌ها D باشد، آن‌گاه در حالت کلی احتمال خرابی هر سازه براساس تحلیل قابلیت اعتماد در این ناحیه، براساس رابطۀ (۱) بیان می‌شود [14].

$$p_f = \int_D \dots \int f_x(x)dx \qquad (۱)$$

در رابطۀ (۱)، $f_x(x)$ تابع چگالی احتمال مشترک متغیرها، D ناحیۀ خرابی معین شده به‌وسیلۀ یک یا چند تابع حالت حدی و $P_f$ میزان احتمال خرابی سازه می‌باشد. با تعریف تابع نشانگر $I(x)$ به‌گونه‌ای که به‌ازای نمونه‌های واقع در ناحیۀ خرابی $I(x) = 1$ و در سایر موارد $I(x) = 0$ باشد، می‌توان رابطۀ (۱) را برای همۀ متغیرها به‌صورت رابطۀ (۲) بیان نمود [۳].

$$p_f = \int_D \dots \int I(x) f_x(x)dx \qquad (۲)$$

برای تولید و شبیه‌سازی نمونه‌ها، به‌جای استفاده از تابع توزیع احتمالی اصلی متغیرها، $f_x(x)$، از یک تابع چگالی احتمال جدید $h_v(v)$ با عنوان تابع چگالی نمونه‌گیری بااهمیت استفاده می‌شود. بنابراین نتایج شبیه‌سازی باید به‌صورت توابع وزنی برای تخمین تابع چگالی بااهمیت، به‌کار گرفته شوند. باتوجه به موارد ذکر شده، احتمال خرابی رابطۀ (۲) به‌صورت رابطۀ (۳) تصحیح می‌شود.

$$p_f = \int_D \dots \int \left\{ I(V) \frac{f_x(V)}{h_v(V)} \right\} h_v(V)dx \qquad (۳)$$

در رابطۀ (۳)، تابع $I(V)$ به‌عنوان یک تابع نشانگر می‌باشد. مقدار این تابع برای نقاطی که در محدودۀ خرابی واقعند برابر ۱ و در غیر این صورت برابر صفر درنظر گرفته می‌شود. تابع $h_v(v)$ نیز به‌عنوان تابع چگالی بااهمیت مناسب می‌باشد. یک تخمین ناریب از احتمال خرابی به‌صورت رابطۀ (٤) بیان می‌شود.

$$p_f = \frac{1}{N} \sum_{J=1}^{N} (I(V_i) \frac{f_x(V_i)}{h_v(V_i)}) \qquad (٤)$$

در رابطۀ (٤) نمونۀ تصادفی $V_i$ بااستفاده از تابع توزیع بااهمیت $h_v(v)$ تولید شده و $f_x(v)$ نیز تابع توزیع احتمال اصلی متغیرها است [15].

## روش نمونه‌برداری ابرمکعب لاتینی [16]
## (Latin Hypercube Sampling (LHS))

روش نمونه‌برداری ابرمکعب لاتینی برای اولین بار توسط «مکی» در سال ۱۹۷۹ ارائه شد [16]. این روش براساس روش لایه‌لایه‌شده (The Layered Method) به تقسیم محدودۀ تغییرات هر متغیر به‌صورت احتمال مساوی می‌پردازد. بدین ترتیب فضای متغیرها عملاً به‌صورت ابرمکعب‌هایی تقسیم می‌شود. سپس نمونه‌گیری از محدودۀ هر یک از این ابرمکعب‌ها به‌عمل می‌آید و براساس قضیۀ احتمال کل، $P_f$ به‌دست می‌آید. در این روش تعدادی از مقادیر ممکن هر متغیر که به لایه‌هایی جزءبندی شده است، انتخاب می‌شود و یک مقدار از هر لایه به‌طور تصادفی به‌عنوان مقدار نماینده انتخاب می‌گردد. تابع حالت حدی Y با K متغیر تصادفی به‌صورت رابطۀ (۵) می‌باشد.

$$Y = f(x_1, x_2, \dots x_k) \qquad (۵)$$

برای به‌دست آوردن اولین ترکیب، از هر متغیر تصادفی K، یک نماینده به‌طور تصادفی انتخاب می‌شود. برای به‌دست آوردن دومین ترکیب، یک نماینده به‌طور تصادفی از N-1 مقدار باقی ماندۀ هر متغیر تصادفی K، انتخاب می‌شود و این مراحل تا به‌دست آوردن N ترکیب از متغیرهای تصادفی ادامه داده می‌شود و درنهایت N مقدار نماینده برای هر کدام از K متغیر تصادفی به‌دست می‌آید. در کل، $N^K$ ترکیب محتمل از

این مقادیر می‌توانـد وجـود داشـته باشـد. هـدف روش ابرمکعب لاتینی این است که بـا انتخـاب N ترکیـب از این مقادیر نماینده، یکی و تنها یک مقدار از N ترکیـب را به‌دست آورد.

## فرمول‌بندی روش رگراسیونی کوچک‌ترین مربعات دستگاه بردارهای پشتیبان (LSSVM) [10-11]

تابع توزیع معین $P(x,y)$ که در آن $x \in R^n, y \in R$ است، را درنظر بگیرید، درنتیجه می‌توان نقاط نمونه‌بـرداری را براساس رابطهٔ (٦) به‌صورت نگاشت نقاط در فضای $R^d$ به R تولید نمود.

$$D:\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),......(x_l,y_l)\} \subset R^d \times R \quad (٦)$$

در رابطـهٔ (۱۱)، $x_t$ بردارهـای ورودی، $y_t$ مقـدار تابع حالت حدی، $t=1,2,....,l$، d ابعاد بـردار و l تعـداد مشاهدات ورودی‌ها و خروجی می‌باشد. می‌توان رابطـهٔ بـین بردارهـای ورودی x و خروجـی y را بـه‌صـورت $y=f(x)$ درنظر گرفـت. اگـر رابطـهٔ خطـی بـین نقـاط نمونـه‌بـرداری، فـرض شـود، آن‌گـاه تـابع رگراسـیونی به‌صورت $f(x)=W^T(X)+b$ به‌دست مـی‌آیـد. در ایـن تابع W و b به‌ترتیب بردار وزن و عرض مدل بـه‌دسـت آمده می‌باشد. خطای آموزشـی تـابع براسـاس کمتـرین ریسک به‌صورت رابطهٔ (۷) به‌دست می‌آید.

$$\min j(w,e)=\frac{1}{2}w^T w+\gamma\sum_{i=1}^{l} e_i^2 \quad (۷)$$

در رابطهٔ (۷)، $\gamma > 0$ و تابع f براساس روابطی که در ادامه ذکر می‌شود به‌دست می‌آید؛ اما در اغلب موارد، ارتبـاط غیـرخطـی بـین بردارهـای ورودی و خروجـی برقرار می‌باشد. درنتیجه تابع رگراسیونی براسـاس تـابع غیرخطی Φ به فضایی با ابعاد بزرگ‌تر تبدیل می‌شـود و درنتیجه رگراسیون خطی به رگراسیونی بـا ابعـاد بـالاتر تبدیل می‌شود. درنتیجه اگـر بـین نقـاط نمونـه‌بـرداری ورودی و خروجی رابطهٔ غیـرخطـی (۸) فـرض شـود، آن‌گاه روش LSSVM به‌وسیلهٔ تابع غیرخطـی Φ، تـابع رگراسیون خطی را به یـک تـابع غیـرخطـی در فضـای نمونهٔ اصلی تبدیل می‌کند.

$$f(x,w)=W.\Phi(x)+b \quad (۸)$$

بنابراین الگوریتم LSSVM قـادر بـه تعیـین تـابع رگراسیونی براساس یـک مسـئلهٔ بهینـه‌سـازی برمبنـای برنامه‌ریزی غیرخطی ($\|w\|^2$) طبق رابطـهٔ (۹) و بـا قیـد تساوی (۱۰) می‌باشد.

$$\min j(w,e)=\frac{1}{2}w^T w+\gamma\sum_{i=1}^{l} e_i^2 \quad (۹)$$

$$y_i = w^T\Phi(x_i)+b+e_i \quad i=1,....,l \quad (۱۰)$$

تابع لاگرانژ به‌صورت رابطهٔ (۱۱) به‌دست می‌آیـد و با مشتق‌گیری از تابع لاگرانژ جمله‌ای قیود بهینـه‌یـابی نیز به‌صورت روابط (۱۲) به‌دست می‌آیند.

$$L(w,b,e,a)=j(w,e)-\sum_{i=1}^{l}a_i(w^T\Phi(x_i)+b+e_i-y_i) \quad (۱۱)$$

$$\frac{\partial L}{\partial b}=0 \rightarrow -\sum_{i=1}^{l}a_i=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial w}=0 \rightarrow w=\sum_{i=1}^{l}a_i\Phi(x_i)$$
$$\frac{\partial L}{\partial e_i}=0 \rightarrow a_i=\gamma e_i$$
$$\frac{\partial L}{\partial a_i}=0 \rightarrow w^T\Phi(x_i)+b+e_i-y_i=0 \quad (۱۲)$$

روابط (۱۲) را برای سادگی مـی‌تـوان بـه‌صـورت ماتریسی به‌شکل رابطهٔ (۱۳) نمایش داد.

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & -Z^T \\ 0 & 0 & 0 & -1^T \\ 0 & 0 & \gamma I & -I \\ Z & 1 & I & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w \\ b \\ e \\ a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ y \end{bmatrix} \quad (۱۳)$$

در رابطهٔ ماتریسی (۱۳)، پارامترها براساس روابـط (١٤) به‌دست می‌آیند.

$$y=[y_1 \quad y_2 \quad ..... \quad y_l]^T \quad (١٤)$$

$$Z = [\Phi(x_1) \quad \Phi(x_2) \quad ..... \quad \Phi(x_l)]^T$$
$$e = [e_1 \quad e_2 \quad ..... \quad e_l]^T$$
$$a = [a_1 \quad a_2 \quad ..... \quad a_l]^T$$
$$1 = [1 \quad 1 \quad ..... \quad 1]^T$$

باتوجه به این‌که در مسائل بهینه‌یابی محاسبهٔ ضرب داخلی $\Phi(x_i).\Phi(x_j)$ مشکل می‌باشد، بنابراین به‌منظور تسهیل در محاسبات می‌توان تابع کرنل $\Psi(x_i, x_j)$ را در روابط (۱٤) به‌جای ضرب داخلی نمود.

$$\Omega_{kj} = (\Phi(x_i))^T \Phi(x_j) = \psi(x_i, x_j) \qquad (۱۵)$$
$(k,j=1,2,...l)$

برای تعیین پارامترهای تابع رگراسیونی انتخابی (a و b) می‌توان با حذف e و w در رابطهٔ (۱٤) و بااستفاده از رابطهٔ (۱۵)، رابطهٔ (۱٦) را به‌دست آورد.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1^T \\ 1 & \Omega + \gamma^{-1} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \qquad (۱٦)$$

در رابطهٔ (۱٦) بافرض $A = \Omega + \gamma^{-1} I$ و باتوجه به معین بودن ماتریس فرض‌شده، می‌توان پارامترهای تابع رگراسیونی را براساس روابط (۱۷) به‌دست آورد.

$$a = A^{-1}(y - b1) \qquad (۱۷)$$

$$b = \frac{1^T A^{-1} y}{1^T A^{-1} 1}$$

بااستفاده از اولین رابطه از روابط (۱۲) و جایگزینی آن با رابطهٔ (۱۵)، تابع رگراسیونی انتخابی به‌صورت رابطهٔ (۱۸) به‌دست می‌آید.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{l} a_i \Psi(x, x_i) + b \qquad (۱۸)$$

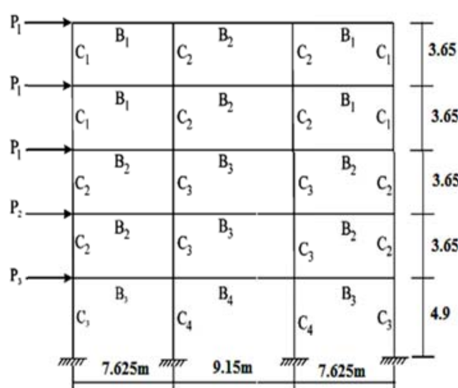
## الگوریتم‌های پیشنهادی براساس ترکیب LSSVM با روش‌های نمونه‌برداری بااهمیت و ابرمکعب لاتینی (LSSVM-ISM ،LSSVM-LHS)

ایدهٔ روش‌های پیشنهادی، به‌دست آوردن مدلی کارا و مناسب برای توصیف مجموعه داده‌های آموزشی و تخمین دقت مناسب برای داده‌های آزمایشی می‌باشد. برای ایجاد چنین مدلی، باید براساس میزان‌سازی بین مدل آموزش‌دیده و مقادیر تابع حالت حدی واقعی، تابع پاسخ مناسبی را به‌دست آورد، این در حالی است که مدل‌های دیگر باتوجه به عدم میزان‌سازی ممکن است توابع نامناسبی را به‌دست آورند. باتوجه به این‌که حل انتگرال مونت‌کارلوی معمولی رابطهٔ (۲) در سازه‌های خرپایی و قاب‌های فولادی که دارای توابع حالت حدی با متغیرهای زیادی هستند، نیاز به زمان بسیار زیادی خواهد داشت. بنابراین برای تسهیل در انتگرال‌گیری، از روش‌های نمونه‌برداری بااهمیت و ابرمکعب لاتینی استفاده شده است. با توجه به این‌که واریانس مقدار $P_f$ با $\sigma^2_{i(x)}$ (واریانس متغیرها) رابطهٔ مستقیم و با تعداد نمونه‌های تولیدشده رابطهٔ عکس دارد درنتیجه انحراف معیار مقدار $P_f$ و حاصل تخمین مونت‌کارلو با نسبت $N^{\frac{1}{2}}$ کاهش می‌یابد و این حکایت از همگرایی کند روش مونت‌کارلو دارد. همگرایی کند روش مونت کارلو با روش‌های ISM و LHS که برمبنای کاهش واریانس هستند جبران خواهد شد. باتوجه به این‌که روش نمونه‌برداری بااهمیت برای افزایش تعداد نقاط نمونه‌گیری در ناحیهٔ خرابی، از یک تابع چگالی احتمال که تأکید آن برروی ناحیهٔ خرابی است، استفاده می‌نماید، روش مناسبی برای نمونه‌برداری داده‌ها می‌باشد. برای انجام نمونه‌گیری و پخش نمونه‌ها در قسمت‌های مختلف خرابی، به شناسایی قسمت‌هایی که چگالی احتمال در آنها بزرگ است، اقدام می‌شود. روش نمونه‌برداری ابرمکعب لاتینی نیز برای تحلیل قابلیت اعتماد سازه‌های پیچیده‌ای که زمان محاسبهٔ فقط یک نمونهٔ شبیه‌سازی آن ممکن است بسیار زیاد باشد، به‌منظور کاهش تعداد نمونه‌های مورد نیاز مناسب است. باتوجه به مطالب ارائه‌شده، براساس روش‌های پیشرفتهٔ مونت کارلو تعداد تحلیل سازه نسبت به روش مونت کارلوی معمولی به‌طور قابل‌توجهی کاهش می‌یابد اما هم‌چنان تحلیل المان محدود امری ضروری می‌باشد. همان‌طور که در قسمت‌های قبل ذکر شد، روش‌هایی از

قبیل شبکهٔ عصبی بر پایهٔ اصل مینیمم‌سازی ریسک تجربی و براساس توپولوژی مناسب تنها می‌توانند خطای آموزش را کاهش دهند و تعمیم‌دهندهٔ کل داده‌ها نمی‌باشند و درنتیجه روش تحلیلی مناسبی برای پیش‌بینی رفتار سازه نمی‌باشند، این در حالی است که روش LSSVM بر پایهٔ اصل مینیمم‌سازی ریسک سازه‌ای و بدون نیاز به توپولوژی با ایجاد مدلی مناسب و تعمیم آن به کل داده ها، روش تحلیلی مناسبی برای پیش‌بینی رفتار سازه ارائه می‌دهد و علاوه بر به‌دست آوردن خطای مناسب، زمان محاسبات را نیز به‌مقدار قابل‌توجهی کاهش خواهد داد.

در این مقاله الگوریتمی براساس ترکیب روش رگراسیونی **LSSVM** با روش‌های نمونه‌برداری بااهمیت و ابرمکعب لاتینی ارائه شده است. اصول کلی این الگوریتم بدین صورت است که ابتدا مجموعه‌ای از داده‌ها که براساس روش‌های نمونه‌برداری بااهمیت و ابرمکعب لاتینی ایجاد شده‌اند، به دو گروه داده‌های آموزشی و آزمایشی تقسیم می‌شوند و پارامترهای مدل بااستفاده از آموزش مجموعه داده‌های آموزشی (آموزش مدل LSSVM) و براساس توابع مختلف کرنل، به‌دست می‌آیند. براساس مدل آموزش یافته، تابع رگراسیونی جدیدی محاسبه می‌شود و درنهایت مقادیر تابع رگراسیونی به‌ازای داده‌های نمونه‌برداری شده محاسبه می‌شود و میزان احتمال خرابی تخمین زده می‌شود. الگوریتم‌های ترکیبی براساس اصولی که هر کدام از روش‌ها دارند، برتری‌های خاصی نسبت به تک‌تک آنها دارد. یکی از این مزیت‌ها، کاهش تعداد نمونه‌ها توسط روش‌های نمونه‌برداری پیشنهادی و کاهش تعداد تحلیل‌های المان محدود برای تعیین احتمال خرابی است که در صورت استفاده از مدل رگراسیونی LSSVM به‌صورت قابل توجهی کاهش می‌یابد. روش‌های نمونه‌برداری برای تعیین نمونه‌ها و مدل LSSVM برای تقریب محدودهٔ خرابی به‌منظور تسهیل در انتگرال‌گیری عددی به‌کار می‌رود. در ادامه به بررسی تحلیل قابلیت اعتماد سه سازه با توابع حالت حدی و تعداد متغیرهای مختلف پرداخته و کارایی بالای الگوریتم‌های پیشنهادی نسبت به دیگر روش‌های نوین نشان داده می‌شود. تعداد داده‌های آزمایش برابر ۲۵ و تعداد تحلیل‌ها برابر ۵۰ درنظر گرفته شده است. نتایج نشان‌دهندهٔ کارایی بالای روش‌های پیشنهادی نسبت به دیگر روش‌ها می‌باشد. به‌منظور تشکیل مدل کارا، برای هر سازه، تحلیل حساسیت بر روی مجموعه داده‌های آموزشی انجام شده و مناسب‌ترین تعداد داده برای آموزش به‌دست آمده است.

***مثال ۱: قاب پرتال فولادی با ۳ دهانه و ۵ طبقه.*** تحلیل این قاب برای اولین بار توسط آقایان بوچر و بورگاند ارائه شد [15]. شمای این قاب در شکل (۱) نشان داده شده است.




شکل ۱ شمای قاب پرتال خطی ۳ دهانهٔ ۵ طبقه

این قاب پرتال شامل ۲۱ متغیر تصادفی می‌باشد. این متغیرها شامل مدول یانگ، ممان اینرسی، سطح مقطع اعضا با توزیع نرمال و هم‌چنین بارهای جانبی با تابع توزیع رایلی می‌باشد. خصوصیات و پارامترهای آماری این متغیرها براساس جداول (۱) و (۲) می‌باشند. اگر جابه‌جایی مجاز این طبقه برابر با ۱۰ سانتی‌متر باشد، آن‌گاه معیار خرابی براساس تحلیل المان محدود به‌صورت تابع حالت حدی رابطهٔ (۱۹) می‌باشد.

$$G(X) = 10 - U_x \qquad (۱۹)$$

در رابطهٔ (۱۹)، $U_x$ جابه‌جایی افقی واقعی برحسب تابعی از متغیرهای تصادفی می‌باشد. نتایج به‌دست آمده براساس الگوریتم‌های پیشنهادی هم‌چنین نتایج روش‌های مراجع دیگر در جدول (۳) ارائه شده است (مقدار احتمال خرابی دقیق براساس روش شبیه‌سازی مونت‌کارلوی معمولی و با ۵۰۰۰۰۰ نمونه بعد از ۱۰ بار تحلیل پیاپی در زمان ۹۵۱۲ ثانیه برابر با ۰/۰۰۰۲۸۹ به‌دست آمده است). نتایج به‌دست آمده در جدول (۳) نشان‌دهندهٔ کارایی بالای روش‌های پیشنهادی از لحاظ دقت محاسبات و کاهش هزینهٔ محاسبات نسبت به دیگر روش‌های تحلیل این قاب می‌باشد.

جدول ۱ خصوصیات اعضای قاب ۳ دهانهٔ ۵ طبقه

| اعضا | مدول یانگ | ممان اینرسی | سطح مقطع |
|---|---|---|---|
| B1 | E1 | I5 | A5 |
| B2 | E1 | I6 | A6 |
| B3 | E1 | I7 | A7 |
| B4 | E1 | I8 | A8 |
| C1 | E2 | I1 | A1 |
| C2 | E2 | I2 | A2 |
| C3 | E2 | I3 | A3 |
| C4 | E2 | I4 | A4 |

جدول ۲ پارامترهای آماری قاب ۳ دهانهٔ ۵ طبقه

| متغیر تصادفی | تابع توزیع | میانگین | انحراف معیار | واحد |
|---|---|---|---|---|
| P1 | Rayleigh | 30 | 9 | KN |
| P2 | Rayleigh | 20 | 8 | KN |
| P3 | Rayleigh | 16 | 6.4 | KN |
| E1 | Normal | 45400 | 4000 | $KN/m^2$ |
| E2 | Normal | 49700 | 4000 | $KN/m^2$ |
| I1 | Normal | 107.47 | 13.72057 | $m^4$ |
| I2 | Normal | 152.06 | 17.15071 | $m^4$ |
| I3 | Normal | 282.415 | 34.3014 | $m^4$ |
| I4 | Normal | 343.014 | 40.018 | $m^4$ |
| I5 | Normal | 142.92 | 34.3014 | $m^4$ |
| I6 | Normal | 186.3711 | 45.7352 | $m^4$ |
| I7 | Normal | 307.569 | 74.319 | $m^4$ |
| I8 | Normal | 343.014 | 85.753 | $m^4$ |
| A1 | Normal | 35.9281 | 6.4157 | $m^2$ |
| A2 | Normal | 42.7716 | 8.5543 | $m^2$ |
| A3 | Normal | 58.1693 | 10.692 | $m^2$ |
| A4 | Normal | 64.1574 | 12.8314 | $m^2$ |
| A5 | Normal | 29.084 | 10.69 | $m^2$ |
| A6 | Normal | 33.468 | 11.762 | $m^2$ |
| A7 | Normal | 42.878 | 13.900 | $m^2$ |
| A8 | Normal | 48.11805 | 15.504 | $m^2$ |

جدول ۳ نتایج روش‌های پیشنهادی و مرجع در مثال ۱

| روش | تعداد نمونه | تعداد داده آموزشی | احتمال خرابی | زمان (ثانیه) | خطای نسبی (٪) |
|---|---|---|---|---|---|
| LSSVM-MCS | 500000 | 150 | 0.00029 | 44.62 | 0.34482 |
| LSSVM-ISM | 3000 | 50 | 0.000291 | 24.67 | 0.82361 |
| LSSVM-LHS | 3500 | 200 | 0.000292 | 44.11 | 1.027397 |
| FORM [8] | - | - | 0.000291 | - | 0.6872852 |
| KRIGING [8] | - | - | 0.00022 | - | -31.36363 |
| روش سطح پاسخ کلاسیک [8] | - | - | 0.000312 | - | 7.494838 |

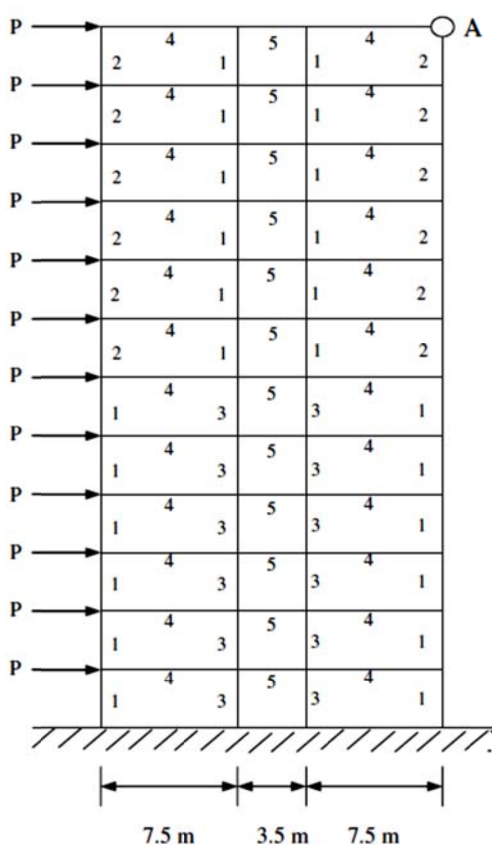
***مثال ۲: قاب پرتال فولادی با ۳ دهانه و ۱۲ طبقه.***
قاب مفروض شامل یک قاب پرتال الاستیک خطی با ۳ دهانه و ۱۲ طبقه می‌باشد [7,13]. شکل (۲) این قاب را به‌همراه تیپ‌بندی تیر و ستون‌های آن نشان می‌دهد (ارتفاع هر طبقه ٤ متر می‌باشد). سطح مقطع تیر و ستون‌ها و هم‌چنین بار افقی وارد به قاب به‌عنوان متغیرهای تصادفی مستقل درنظر گرفته شده‌اند. مدول یانگ به‌عنوان پارامتر قطعی برابر با $2\times10^{7}$ می‌باشد. ممان اینرسی اعضای این قاب نیز به‌عنوان متغیری وابسته به سطح مقطع‌ها، براساس رابطهٔ (۲۰) بیان می‌شود.

$$I_i = a_i A_i^2 \qquad (۲۰)$$

با فرض این‌که ماکزیمم جابه‌جایی افقی گره A برابر با ۰/۰۹٦ متر باشد، آن‌گاه تابع حالت حدی براساس پارامترهای تصادفی فرض شده، به‌صورت رابطهٔ (۲۱) درنظر گرفته می‌شود.

$$G(x) = 0.096 - u_A(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, P) \qquad (۲۱)$$

پارامترهای آماری نمونه‌های تصادفی اصلی و ضرایب ممان اینرسی این قاب نیز مطابق جدول (٤) می‌باشد. نتایج به‌دست آمده از روش‌های پیشنهادی براساس تعداد نمونه‌های آموزشی که براساس تحلیل حساسیت به‌دست آمده‌اند، به‌همراه نتایج روش‌های پیشنهادی مرجع اصلی به‌صورت جدول (۵) می‌باشد. نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهند که روش‌های پیشنهادی هزینهٔ زمانی را به نحو مؤثری کاهش می‌دهند و برآورد احتمال خرابی را با دقت مناسب ارائه می‌دهند (مقدار احتمال خرابی دقیق با ۱۰۰۰۰۰ نمونه مونت‌کارلو و با ۱۰ بار تحلیل پیاپی در زمان ٥٢٤٦ ثانیه برابر با ۰/۰۷٥۱ به‌دست آمده است، این میزان برابر مقدار دقیق ارائه‌شده در مرجع ۷ می‌باشد).

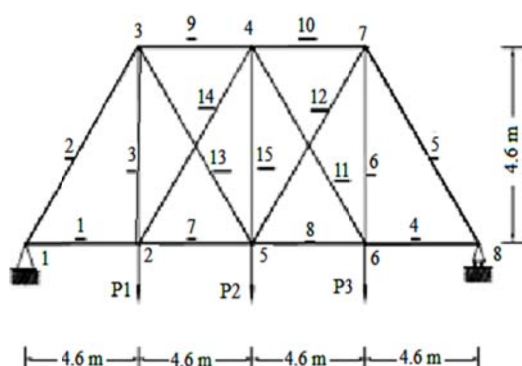



شکل ۲ شمای قاب ۳ دهانهٔ ۱۲ طبقه

جدول ٤ پارامترهای آماری قاب ۳ دهانهٔ ۱۲

| ضرایب $a_i$ | توزیع | واحد | انحراف معیار | میانگین | متغیر |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0833 | Lognormal | $m^2$ | 0.025 | 0.25 | $A_1$ |
| 0.0833 | Lognormal | $m^2$ | 0.016 | 0.16 | $A_2$ |
| 0.0833 | Lognormal | $m^2$ | 0.036 | 0.36 | $A_3$ |
| 0.2667 | Lognormal | $m^2$ | 0.02 | 0.2 | $A_4$ |
| 0.2 | Lognormal | $m^2$ | 0.015 | 0.15 | $A_5$ |
| - | Type I Largest | KN | 7.5 | 30 | P |

***مثال ۳: خرپای ۱۵ عضوی با تابع حالت حدی جابه‌جایی.*** مثال آخر یک خرپای ۱۵ عضوی است که از مرجع ۳ برگرفته شده است. هندسهٔ این خرپا در شکل (۳) نشان داده شده است. سطح مقطع همهٔ ۱۵ عضو و ۳ بار متمرکز که بر گره‌های ۲، ۵ و ٦ وارد شده است، به‌عنوان متغیرهای تصادفی مستقل از هم می‌باشند. مدول یانگ نیز به‌عنوان پارامتر قطعی برابر با ۲۰۰ GPA فرض می‌شود. براساس تحلیل الاستیک خطی، میزان جابه‌جایی مجاز گرهٔ میانی (گره ۵) برابر با ۷/۵ سانتی‌متر به‌دست آمده است. پارامترهای آماری متغیرها، در جدول (٦)، ارائه شده است. هم‌چنین نتایج به‌دست آمده از روش‌های پیشنهادی براساس تعداد نمونه‌های آموزشی که براساس تحلیل حساسیت به‌دست آمده‌اند، به‌همراه نتایج روش پیشنهادی مرجع اصلی به‌صورت جدول (۷)، می‌باشد. میزان احتمال خرابی دقیق در مرجع ۳ برابر ۰/۰۱٤ به‌دست آمده است.




شکل ۳ هندسهٔ خرپای ۱۵ عضوی

جدول ۵ نتایج روش‌های پیشنهادی و مرجع در مثال ۲

| خطای نسبی | زمان (ثانیه) | احتمال خرابی | تعداد داده | تعداد نمونه | روش |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0665 | 17.09 | 0.07515 | 100 | 100000 | LSSVM-MCS |
| 0.0931 | 8.7 | 0.07517 | 60 | 1000 | LSSVM-ISM |
| 0.0665 | 5.75 | 0.07515 | 50 | 1000 | LSSVM-LHS |
| -4.596 | 491.7 | 0.0718 | - | - | GA-ANN [7] |
| 3.346 | 80.7 | 0.0777 | 160 | - | GA-ANN-MCSIS [7] |
| -1.417 | - | 0.07405 | 257 | - | RBF-MCS [14] |

جدول ٦ پارامترهای آماری خرپای ۱۵ عضوی

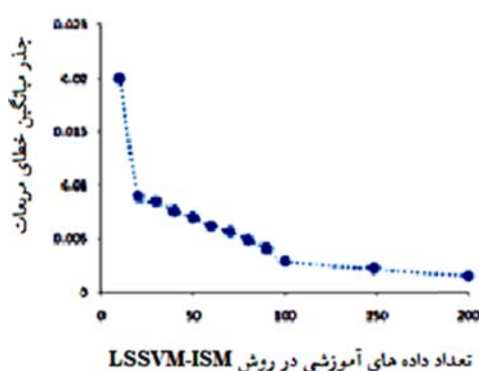
| تابع توزیع | واحد | انحراف معیار | میانگین | متغیر |
|---|---|---|---|---|
| Normal | $cm^2$ | 0.516 | 10.32 | A1-A6 |
| Normal | $cm^2$ | 0.323 | 6.45 | A7-A15 |
| Lognormal | KN | 0.09975 | 4.483 | Ln P1 |
| Lognormal | KN | 0.09975 | 5.582 | Ln P2 |
| Lognormal | KN | 0.09975 | 4.483 | Ln P3 |

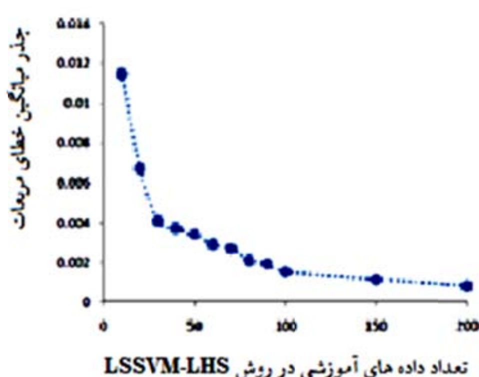
جدول ۷ نتایج روش‌های پیشنهادی در مثال ۳

| خطای نسبی (٪) | زمان (ثانیه) | احتمال خرابی | تعداد داده های آموزشی | تعداد نمونه‌ها | روش‌های پیشنهادی |
|---|---|---|---|---|---|
| -0.8645 | 15.36 | 0.001388 | 50 | 1000000 | LSSVR-MCS |
| -0.3584 | 3.892 | 0.001395 | 50 | 3500 | LSSVR-LHS |
| -0.7194 | 8.375 | 0.00139 | 60 | 1000 | LSSVR-ISM |

***تحلیل حساسیت برروی داده‌های آموزشی و تعیین میزان خطای داده‌های تست در مثال ۲.*** تحلیل حساسیت بر روی مدل، براساس تعداد مختلفی از داده‌های آموزشی و با ثابت درنظر گرفتن تعداد داده‌های تست (تعداد داده‌های تست برابر با ۲۵ درنظر گرفته شده است)، انجام می‌شود. براساس این تحلیل حساسیت، محدودۀ مناسبی از داده‌های آموزشی به‌دست می‌آید. همان‌طور که در شکل (٤) قابل مشاهده است، در هر دو روش پیشنهادی LSSVM-LHS و LSSVM-ISM، میزان جذر میاتگین خطای مربعات (RMSE)، ناشی از مقادیر تابع حالت حدی مدل ایجاد شده برای داده‌های تست، باافزایش تعداد داده‌های آموزشی، کاهش می‌یابد.

***تحلیل حساسیت برروی داده‌های آموزشی و تعیین میزان احتمال خرابی در مثال ۲.*** در این قسمت، تحلیل حساسیت برای یافتن بهترین مجموعه از داده‌های آموزشی، براساس میزان احتمال خرابی به‌دست آمده انجام شده است. این تحلیل بدین صورت است که در هرکدام از روش‌های پیشنهادی، با درنظر گرفتن تعداد مختلفی از داده‌های آموزشی، میزان احتمال خرابی سازه براساس ۱۰۰ بار تحلیل به‌دست می‌آید. نتایج به‌دست آمده در جداول (۸) و (۹) نشان داده شده است. شکل (۵) نیز مقادیر احتمال خرابی را برای تعداد داده‌های آموزشی مختلف برای هر دو روش نشان می‌دهد. مقدار ضریب تغییرات کمتر از ۰/۱ و در صد خطای کمتر از یک درصد به‌عنوان مقادیر مناسب درنظر گرفته می‌شوند. نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد که با افزایش تعداد داده‌های آموزشی، میزان ضریب تغییرات و درصد خطای نسبی مقادیر احتمال خرابی کاهش می‌یابد. باتوجه به این‌که مقادیر ضریب تغییرات و درصد خطای احتمال خرابی به‌دست آمده براساس تعداد ۵۰ و ٦۰ داده به‌ترتیب برای روش‌های LSSVM-LHS و LSSVM-ISM، در بازۀ مناسبی قرار دارد، درنتیجه می‌توان براساس تحلیل حساسیت داده‌های آموزشی، این تعداد را به‌عنوان تعداد داده‌های آموزشی مناسب درنظر گرفت.



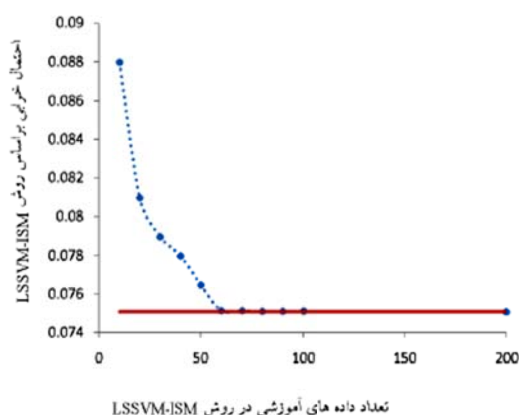

شکل ٤ نمودارهای جذر میانگین خطای مربعات براساس تعداد داده‌های آموزشی مختلف

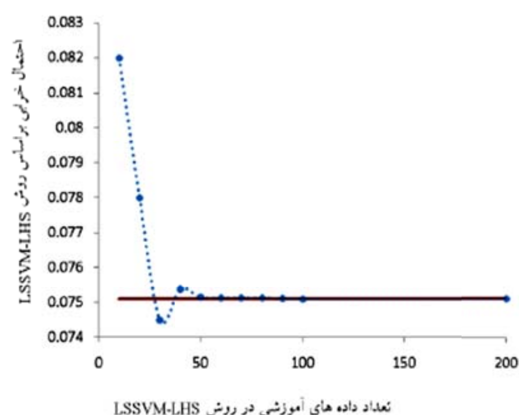
جدول ۸ تحلیل حساسیت برروی داده‌های آموزشی و تعیین احتمال خرابی در روش LSSVM-LHS

| روش | تعداد نمونه | تعداد داده های آموزشی | احتمال خرابی | انحراف معیار خرابی | ضریب تغییرات | خطای نسبی | زمان |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| LSSVR-LHS | 1000 | 10 | 0.082 | 0.077 | 0.93902 | 8.414 | 1.45 |
| | | 20 | 0.078 | 0.0277 | 0.355128 | 3.717 | 2.05 |
| | | 30 | 0.0745 | 0.0161 | 0.21610 | -0.805 | 3.18 |
| | | 40 | 0.0754 | 0.0077 | 0.102122 | 0.3978 | 4.42 |
| | | 50 | 0.07515 | 0.0027 | 0.035928 | 0.0665 | 5.75 |
| | | 60 | 0.075145 | 0.00265 | 0.03526 | 0.0598 | 7.15 |
| | | 90 | 0.07512 | 0.0015 | 0.019968 | 0.0266 | 12.1 |
| | | 100 | 0.07511 | 0.000756 | 0.010065 | 0.0133 | 14.95 |
| | | 200 | 0.075105 | 0.000452 | 0.006018 | 0.0066 | 50.8 |

جدول ۹ تحلیل حساسیت برروی داده‌های آموزشی و تعیین احتمال خرابی در روش LSSVM-ISM

| روش | تعداد نمونه | تعداد داده های آموزشی | احتمال خرابی | انحراف معیار خرابی | ضریب تغییرات | خطای نسبی | زمان |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| LSSVR-ISM | 1000 | 10 | 0.088 | 0.02523 | 0.2867045 | 14.659 | 2.04 |
| | | 20 | 0.081 | 0.0232 | 0.2864197 | 7.2839 | 3.05 |
| | | 30 | 0.079 | 0.0223 | 0.2822784 | 4.936 | 4.076 |
| | | 40 | 0.078 | 0.01812 | 0.2323076 | 3.717 | 6.23 |
| | | 50 | 0.0765 | 0.0104 | 0.1359477 | 1.830 | 7.51 |
| | | 60 | 0.07517 | 0.0074 | 0.098443 | 0.0931 | 8.7 |
| | | 90 | 0.07514 | 0.0045 | 0.0598882 | 0.05323 | 12.05 |
| | | 100 | 0.07512 | 0.00211 | 0.02808 | 0.0266 | 15.74 |
| | | 200 | 0.075108 | 0.000463 | 0.0061 | 0.0106 | 54.14 |




شکل ۵ نمودارهای میزان احتمال خرابی براساس تعداد مختلفی از داده‌های آموزشی

## جمع‌بندی

در این مقاله به بررسی کارایی روش‌های LSSVR-LHS

و LSSVM-ISM پرداخته شد. براساس این روش‌ها و بااستفاده از داده‌های آموزشی، مدل مربوط ایجاد شد و درنهایت براساس روش‌های پیشنهادی، میزان احتمال خرابی تخمین زده شد. با ارائهٔ ۲ مثال از قاب و یک مثال خرپایی، نشان داده شد که روش‌های پیشنهادی جهت تقریب تابع رگراسیونی، برای توابعی بسیار مفید هستند که دارای فرم ریاضی نیستند و جهت تحلیل قابلیت اعتماد نیاز به زمان زیادی جهت تحلیل المان محدود خواهند داشت. هزینهٔ زمانی صرف‌شده از طریق روش‌های پیشنهادی به‌طور قابل توجهی از روش‌های دیگر کمتر می‌باشد. در ضمن، دقت محاسبات نیز در حد معقول و حتی بهتر از روش‌های دیگر خواهد بود.

## مراجع


1. Nowak, A.S., Collins, K.R., "Reliability of Structures", *McGraw-Hill., Boston,* pp. 1-6, (2000).
2. Hurtado, J.E., "An Examination of Methods for Approximating Implicit Limit State Functions From the Viewpoint of Statistical Learning Theory", *Structural Safety*, Vol. 26, pp. 271-293, (2004).
3. Zhang, H., Robert, L., Muhanna, R., and Almgren, R., " Interval Monte Carlo Methods for Structural Reliability", *Structural Safety*, Vol. 32, pp. 183–190, (2010).
4. Rackwitz, R., "Response Surfaces in Structural Reliability", Berichte Zur Zuverl Assign Keits Theorie der Bauwerke, Heft 67 Munchen, (1982).
5. Deng, J., Gu, D., Li, X. and Yue, Z.Q., "Structural Reliability Analysis for Implicit Performance Functions Using Artificial Neural Network", *Structural Safety*, Vol. 27, pp. 25–48, (2005).
6. Gomes, H.M., Awruch, A.M., "Comparison of Response Surface and Neural Network With Other Methods for Structural Reliability Analysis", *Structural Safety*, Vol. 26, pp. 49–67, (2004).
7. Cheng, J., "Hybrid Genetic Algorithms for Structural Reliability Analysis", *Computers and Structures*, Vol. 85, pp. 1524–1533, (2007).
8. Kaymaz, I., "Application of Kriging Method to Structural Reliability Problems", *Structural Safety*, Vol. 27, pp. 133–151, (2005).
9. Vapnik V. "Statistical Learning Theory", John, Wiley and Sons., New York, (1998).
10. Zhiwei, G., Guangchen, B., "Application of Least Squares Support Vector Machine for Regression to Reliability Analysis", *Chinese Journal of Aeronautics,* Vol. 22, pp. 160-166, (2009).
11. Li, H.S. And Lu, Z.Z., "Support Vector Regression for Structural Reliability Analysis", *Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 27(10), pp. 1295–1303, (2006).
12. Zhao, W., Qiu, Z., "An efficient response surface method and its application to structural reliability and reliability-based optimization", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 67, pp. 34–42, (2013).
13. Deng, J. "Structural Reliability Analysis for Implicit Performance Function using Radial Basis Function Network", *International Journal of Solids and Structures, Vol.* 43, pp. 3255-3291 (2006).

14. Tang, C.X., Jin, W.L. and Chen, J., "Importance Sampling Method based on SVM", *J Yangtze River Scientific Res Inst,* Vol. 24(6), pp. 62–5, (2007).
15. Bucher, C.G., Bourgund, U., "A fast and Efficient Response Surface Approach for Structural Reliability Problems", Structural Safety, Vol. 7(1), pp. 57–66, (1990).
16. McKay, M.D., Beckman, R.J., "A comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code", *Technometrics*, Vol. 42(1), pp. 239–45, (2000).